Generating functions of Weyl invariants of the SU(N) group

1979 J. Phys. A: Math. Gen. 12 1633

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/12/10/011)

J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 12, No. 10, 1979. Printed in Great Britain

Fonction génératrice des invariants de Weyl du groupe SU(N)

M Hage Hassan†

Institut de Physique Nucléaire (et IN2P3), Université Claude Bernard, Lyon-I, 43, Bd du 11 Novembre 1918, 69621 Villeurbanne, France

Reçu le 15 mars 1978, en forme définitive le 6 décembre 1978

Résumé. Prenant pour point de départ la fonction génératrice de la base de représentation dans l'espace de Bargmann et utilisant les propriétés de cet espace et l'intégrale de Gaunt, l'approche présentée ici est une méthodé donnant une expression simple et compacte de la fonction génératrice des invariants de Weyl dont dérivent les symboles 3-j du groupe SU(N). Appliquée au groupe SU(2), la méthode donne la fonction génératrice des symboles 3-j de Schwinger. La fonction génératrice de la base de représentation de SU(3) est construite, et les éléments de la matrice de représentation de SU(3) sont calculés; l'équivalence d'un ensemble de ces éléments et de l'ensemble des fonctions harmoniques de Beg et Ruegg est démontrée. Pour le groupe SU(N) une nouvelle paramétrisation est proposée, la mesure invariante est déterminée, et des cas particuliers de recherche de fonction génératrice des invariants de Weyl sont traités pour illustrer la méthode (cas de SU(3) et de SU(N)).

Abstract. We develop a method for obtaining a simple and compact expression for the generating function of the Weyl invariants. Our approach starts from the generating function of the representation basis in Bargmann space and uses the properties of this space in connection with Gaunt's integral. From the generating function of the Weyl invariants it is possible to derive the 3-j symbols of SU(N). When applied to SU(2), our method merely leads to the well-known Schwinger generating function of the 3-j symbols. The generating function of the SU(3) representation basis is built, and the SU(3) representation matrix elements are calculated; the equivalence between a part of these matrix elements and the Beg and Ruegg harmonic functions is proved. We propose a new parametrisation for SU(N), the invariant measure of which is explicitly determined. As an illustration, we apply our approach to the determination of the generation function of the Weyl invariants in some particular representations of SU(3) and SU(N).

1. Introduction

L'étude des groupes unitaires prend de plus en plus d'importance en raison du rôle qu'elle joue dans la classification des particules élémentaires à interaction forte et dans l'étude des structures atomiques et nucléaires qui est l'un de leurs principaux domaines d'application (De Swart 1963, Kramer et Moshinsky 1968).

La technique des opérateurs de bosons a été développée par Schwinger (1965) pour le group SU(2) puis étendue par Bargmann et Moshinsky (1960, 1961) et d'autres (Moshinsky 1963, Baird et Biedenharn 1963) au groupe unitaire U(N). Dans l'ensemble de ces travaux, les opérateurs infinitésimaux des groupes unitaires exprimés à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation des bosons ont été employés pour la construction des vecteurs de l'espace de la représentation dans l'espace des bosons ainsi

† Boursier du CNRS Libanais.

que pour le calcul des coefficients de Wigner (Moshinsky 1963, Chacon *et al* 1972). Dans le travail de Schwinger (1965) est exposé une méthode utile pour la construction de la fonction génératrice des symboles 3-*j*, mais cette méthode est difficile à généraliser au groupe SU(N). Bargmann (1962), Resnikoff (1967) et d'autres auteurs (Hongoh 1974) ont essayé de déduire les symboles 3-*j* des invariants de Weyl qu'il leur a fallu construire, mais cette construction se révèle difficile en général pour SU(N) quand $N>2$.

La considération de cette difficulté nous a conduit à procéder autrement. Notre approche consiste à construire la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation de SU(N) dans l'espace de Bargmann (1962) de laquelle nous déduisons la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation. Puis, utilisant ces dernières fonctions et l'intégrale de Gaunt, nous aboutissons à la fonction génératrice des invariants de Weyl. Cette méthode exige l'utilisation des transformations finies et une nouvelle paramétrisation de SU(N) ainsi que la détermination de la mesure invariante sur le groupe. La modification de l'expression de l'intégrale de Gaunt par l'introduction de paramètres réels et positifs convenablement choisis permet de la calculer dans l'espace de Bargmann et présente l'intérêt de donner une expression de la fonction génératrice des invariants de Weyl sous une forme compacte et simple.

Notre méthode se caractérise par sa simplicité. En effet, elle n'exige pas de longs calculs, soit qu'il s'agisse de retrouver des résultats bien connus, ou d'obtenir de nouveaux résultats. Elle nous permet de construire simplement la fonction génératrice du groupe SU(2). Elle nous permet de démontrer qu'un ensemble des éléments de la matrice de représentation de SU(N) est solution d'une équation différentielle et que cet ensemble, dans le cas du groupe SU(3), est équivalent à l'ensemble des fonctions harmoniques déterminées par Beg et Ruegg (1965). Enfin, notre méthode permet de calculer les éléments des matrices de passage d'une représentation à une autre: coefficients de Talmi, coefficients de Talmi–Moshinsky (voir Wong 1970).

Dans cette étude, nous consacrons les préliminaires au rappel des propriétés de l'espace de Bargmann et des propriétés des groupes unitaires, et nous exposons la méthode de travail. L'application de la méthode au groupe SU(2) fait l'objet de la première partie. Dans la deuxième partie, prenant pour point de départ la fonction génératrice des symboles 3-*j* de SU(2), nous construisons la fonction génératrice de la base de représentation de SU(3). Nous démontrons que l'ensemble des fonctions harmoniques déterminées par Beg et Ruegg (1965) est équivalent à un ensemble des éléments de la matrice de représentation. Nous construisons une fonction génératrice d'invariants de Weyl. La troisième partie expose une nouvelle paramétrisation de SU(N). Nous déterminons un ensemble des éléments de la matrice de représentation qui est solution d'une équation de Laplace–Beltrami, nous déterminons la mesure invariante sur le group SU(N) enfin, nous construisons la fonction génératrice pour un ensemble d'invariants de Weyl. L'appendice 1 est consacré à la résolution de l'équation de Laplace qui nous est utile. Dans l'appendice 2 est exposé le calcul des éléments de la matrice de représentation du groupe SU(3).

2. Préliminaires

2.1. Espace de Bargmann

Nous appleons $\mathscr{F}_n$ l'ensemble des fonctions analytiques entières $f(z)$, où $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est un point de l'espace Euclidien complexe à n dimensions C_n.

Le produit scalaire $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ appartenant à C_n est défini par

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i, \tag{2.1}$$

où $\bar{a}$ est le conjugué de a.

Nous utiliserons aussi le produit (ab) défini par

$$(ab) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{2.2}$$

2.1.1. Espace de Hilbert $\mathcal{F}_n$. Le produit scalaire de deux éléments f et f' de $\mathcal{F}_n$ s'écrira

$$(f, f') = \int \overline{f(z)} f'(z) \, \mathrm{d}\mu_n(z), \tag{2.3}$$

avec la mesure

$$\mathrm{d}\mu_n(z) = \pi^{-n} \exp[-(\bar{z}z)] \prod_{k=1}^{n} \mathrm{d}z_k = \rho_n(z) \prod_{k=1}^{n} \mathrm{d}z_k, \tag{2.4}$$

où

$$z_k = x_k + \mathrm{i} y_k, \qquad \mathrm{d}z_k = \mathrm{d}x_k \, \mathrm{d}y_k. \tag{2.5}$$

Le complexe conjugué de $f(z)$ est $\overline{f(z)}$.

De la relation (2.4) on déduit que

$$(z_i^{h_i}, z_j^{h_j}) = \delta_{ij} \delta_{h_i h_j} h_i!, \qquad (\mathrm{e}^{\alpha z_i}, \mathrm{e}_j^{\beta z}) = \mathrm{e}^{\bar{\alpha}\beta} \delta_{ij}. \tag{2.6}$$

Les opérateurs z_k et $d_k = \partial/\partial z_k$ sont des opérateurs sur $\mathcal{F}_n$ et sont adjoints l'un de l'autre car on vérifie que

$$(z_k f, g) = (f, d_k g), \qquad (d_k f, g) = (f, z_k g),$$

et

$$z_k = d_k^*, \qquad d_k = \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial y_k}\right). \tag{2.7}$$

2.1.2. Transformation unitaire $\mathscr{C}U$. A chaque transformation unitaire U de C_n on fait correspondre un opérateur $\mathscr{C}U$ défini sur $\mathcal{F}_n$ par

$$(\mathscr{C}Uf)(z) = f({}^{\mathrm{t}}Uz), \qquad {}^{\mathrm{t}}\bar{U}U = I. \tag{2.8}$$

${}^{\mathrm{t}}U$ et $\bar{U}$ sont respectivement la matrice transposée et la matrice complexe conjuguée de la matrice $U = (U_{ij})$,

$$(\mathscr{C}\,{}^{\mathrm{t}}U) = {}^{\mathrm{t}}\mathscr{C}U, \qquad \mathscr{C}\bar{U} = \overline{\mathscr{C}U}. \tag{2.9}$$

La transformation $\mathscr{C}U$ étant unitaire, elle possède les propriétés:

Premièrement: $\mathscr{C}U$ est un opérateur linéaire et unitaire qui laisse invariante la mesure $\mathrm{d}\mu_n(z)$.

Deuxièmement: La matrice U étant unitaire, il en découle (voir Hage Hassan 1970) que dans le déterminant de la matrice U, si nous remplaçons les k vecteurs colonnes $i_1, \ldots, i_k (k \leq n)$ par k vecteurs $j_1, \ldots, j_k$ choisis parmi les n vecteurs de la base $\{e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\}$, le nouveau déterminant est égal à $\det(U_{i_m j_{m'}}) \det(U)$, m, $m' = 1, \ldots, k$.

Troisièmement: Si la transformation U_N appartient au groupe unimodulaire SU(N), elle ne dépend que de N^2-1 paramètres indépendants et le $\det(U_N)=1$. Nous choisissons de remplacer dans la notation ${}^{\mathrm{t}}U_N$ par U_N et de poser $z'=U_N(z)$ dans l'expression (2.8).

2.1.3. Espace produit direct. L'espace produit direct $\mathscr{F}_{(n_1)}\otimes\mathscr{F}_{(n_2)}\ldots\otimes\mathscr{F}_{(n_p)}$ correspond à une décomposition de $\mathscr{F}_{(n)}=\mathscr{F}_{(n_1+n_2+\ldots+n_p)}$ avec $n=n_1+n_2+\ldots+n_p$,

$$\begin{aligned} z^1 &= (z^1_1, z^1_2, z^1_3, \ldots, z^1_{n_1}),\\ z^2 &= (z^2_1, z^2_2, z^2_3, \ldots, z^2_{n_2}),\\ &\vdots\\ z^p &= (z^p_1, z^p_2, z^p_3, \ldots, z^p_{n_p}), \end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$f(z^i)\in\mathscr{F}(n_i),\qquad f(z)=\prod_{i=1}^{p} f(z^i)\in\mathscr{F}_{(n)},\qquad \mathrm{d}\mu_n(z)=\prod_{i=1}^{p}\mathrm{d}\mu_{n_i}(z^i). \tag{2.11}$$

Si $n_1=n_2=\ldots=n_p=n$ l'espace produit direct sera noté $\mathscr{F}^{(p)}_{(n)}$, et dans le cas

$$T_U f(z)=f({}^{\mathrm{t}}Uz^1)\times\ldots\times f({}^{\mathrm{t}}Uz^p) \tag{2.12}$$

nous posons

$$T_U=\mathscr{C}^{(1)}_U\otimes\mathscr{C}^{(2)}_U\otimes\ldots\otimes\mathscr{C}^{(p)}_U.$$

2.2. Représentation du groupe unitaire

2.2.1. Les éléments de base $\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ de la représentation. Nous considérons l'espace $D_{[h]}$ des polynômes homogènes qui est un sous-espace de $\mathscr{F}^{(n)}_{(n)}$. Toute fonction appartenant à $D_{[h]}$ est définie par

$$f(\lambda_1 z^1, \lambda_2 z^2, \ldots, \lambda_n z^n)=\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_n^{k_n} f(z^1, z^2, \ldots, z^n), \tag{2.13}$$

avec

$$\begin{aligned} &k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_n, && z^i\in C_n,\\ &h_1=k_1-k_2, && h_2=k_2-k_3, \ldots, h_n=k_n. \end{aligned}$$

L'espace produit direct est

$$D_{[h^1,h^2,\ldots,k^k]}=D_{[h^1]}\otimes D_{[h^2]}\otimes\ldots\otimes D_{[h^k]}, \tag{2.14}$$

avec

$$[h^k]=[h^k_1, h^k_2, \ldots, h^k_n].$$

La base de représentation du groupe unitaire qui a été construite (Moshinsky 1963, Baird et Biedenharn 1963) dans l'espace des bosons correspond dans l'espace de Bargmann à l'ensemble des vecteurs orthogonaux appartenant au sous-espace $D_{[h]}$ que nous notons:

$$\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha)}=\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha)}(z^1, z^2, \ldots, z^n). \tag{2.15}$$

Les opérateurs des transformations infinitésimales seront écrits

$$C^{ij} = (z^i d^j), \qquad C_{ij} = (z_i d_j), \tag{2.16}$$

avec

$$z^i = (z^i_1, z^i_2, \dots, z^i_n), \qquad z_i = (z^1_i, z^2_i, \dots, z^n_i),$$
$$d^i = (d^i_1, d^i_2, \dots, d^i_n), \qquad d_j = (d^1_j, d^2_j, \dots, d^n_j).$$

Les éléments de base $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ doivent satisfaire les conditions

$$\begin{aligned} &C^{ii}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = k_i \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}, \\ &C^{ij}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = 0 \qquad \text{pour } i<j. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Notons que

$$(\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}, \mathcal{V}^{[h']}_{(\alpha')}) = \delta_{[h],[h']}\delta_{(\alpha),(\alpha')}, \tag{2.18}$$

avec

$$\delta_{[h],[h']} = \delta_{h_1 h_1'} \dots \delta_{h_n h_n'}.$$

Il en résulte que ces vecteurs de base $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ sont fonction de déterminants indépendants formés de colonnes des matrices (z^i_j), $j \leq i \leq n$.

Pour U_N appartenant à SU(N) la base de représentation $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ ne dépend que des $N-1$ premiers vecteurs et $h_N = 0$.

C_{ij} doit être remplacé par

$$C_{ij} - H\delta_{ij}, \qquad H = \sum_{i=1}^{n} C_{ii}. \tag{2.19}$$

Pour $N = 2$,

$$\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \mathcal{V}^{j}_{m}, \tag{2.20}$$

et dans cette représentation $\mathcal{V}^j_m$ est fonction propre du carré du moment angulaire et de sa projection sur l'axe des z.

Pour $N = 3$,

$$\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(t,t_0,y)}, \qquad k_1 = \lambda + \mu, \qquad k_2 = \mu. \tag{2.21}$$

Cette représentation est fonction propre du carré du spin isotopique t^2, de sa projection t_z sur l'axe des z, et de y qui représente le triple de l'opérateur hypercharge.

Dans la suite de ce travail, il ne sera question que de sous-groupes unimodulaires.

2.2.2. La représentation irréductible $D^{[h]}(U_N)$. Cette représentation est définie par la restriction de l'action T_{U_N} au sous-espace $D_{[h]}$:

$$T_{U_N}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \sum_{(\alpha')} D^{[h]}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_N)\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha')}. \tag{2.22}$$

La matrice de représentation a pour éléments

$$D^{[h]}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_N) = (\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha')}, T_{U_N}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}). \tag{2.23}$$

Les éléments de la matrice de représentation satisfont l'intégrale de Gaunt:

$$\int D^{[h^1]}_{(\alpha'_1),(\alpha_1)}(U_N)D^{[h^2]}_{(\alpha'_2),(\alpha_2)}(U_N)D^{[h^3]}_{(\alpha'_3),(\alpha_3)}(U_N)\,\mathrm{d}U_N$$

$$=\sum_{\rho}\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha'_1) & (\alpha'_2) & (\alpha'_3)\end{pmatrix}_{\rho}\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3)\end{pmatrix}_{\rho}, \tag{2.24}$$

où $\mathrm{d}U_N$ est la mesure invariante sur le groupe SU(N), où ρ exprime la multiplicité, et où $\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3)\end{pmatrix}_{\rho}$ sont les symboles 3-j de Wigner. Les éléments satisfont aussi

$$\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3)\end{pmatrix}_{\rho}$$

$$=\sum_{(\alpha')} D^{[h^1]}_{(\alpha'_1),(\alpha_1)}(U_N)D^{[h^2]}_{(\alpha'_2),(\alpha_2)}(U_N)D^{[h^3]}_{(\alpha'_3),(\alpha_3)}(U_N)\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha'_1) & (\alpha'_2) & (\alpha'_3)\end{pmatrix}_{\rho}. \tag{2.25}$$

Soit $G_N(t)$ la fonction génératrice de la base $\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha)}$,

$$G_N(t)=\sum_{(\alpha)[h]}(t)^{[h]}_{(\alpha)}\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha)}, \qquad G_N(t)\in D_{[h]}, \tag{2.26}$$

où $(t)^{[h]}_{(\alpha)}$ est l'ensemble d'un produit de paramètres réels ou complexes constituant en général une base de l'espace de Bargmann à un facteur multiplicatif près, introduits pour donner une forme exponentielle à $G_N(t)$.

Nous écrivons à l'aide de l'expression (2.22) la fonction génératrice de $D^{h}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_N)$:

$$G_N(t,U_N)=\sum_{(\alpha)[h]}(t)^{[h]}_{(\alpha)}T_{U_N}\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha)}$$

$$=\sum_{(\alpha)(\alpha')[h]}(t)^{[h]}_{(\alpha)}D^{[h]}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_N)\mathscr{V}^{[h]}_{(\alpha')}. \tag{2.27}$$

Dans l'espace produit direct $D_{[h^1,h^2,\ldots,h^k]}$ la fonction génératrice sera notée

$$G^k_N(t,U_N)=\prod_{i=1}^{k}G^i_N(t,U_N), \tag{2.28}$$

et la transformation unitaire s écrira

$$T^{(1,2,\ldots,p)}_{U_N}=T^{(1)}_{U_N}\otimes T^{(2)}_{U_N}\otimes\ldots\otimes T^{(p)}_{U_N}. \tag{2.29}$$

De l'expression (2.24) nous déduisons $G^3_N(t)$:

$$G^3_N(t)=\int G^3_N(t,U_N)\,\mathrm{d}U_N=\sum_{\substack{[h]\rho\\(\alpha)(\alpha')}}\mathscr{H}'_{\rho}(t)\mathscr{H}_{\rho}, \tag{2.30}$$

où

$$\mathscr{H}'_{\rho}(t)=\sum_{(\alpha')}\prod_{i=1}^{3}((t)^{[h^i]}_{(\alpha'_i)})\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha'_1) & (\alpha'_2) & (\alpha'_3)\end{pmatrix}_{\rho},$$

$$\mathscr{H}_{\rho}=\sum_{(\alpha)}\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3)\end{pmatrix}_{\rho}\prod_{i=1}^{3}\mathscr{V}^{[h^i]}_{(\alpha_i)}. \tag{2.31}$$

La relation (2.25) permet d'écrire

$$T^{(1,2,3)}_{U_N}\mathscr{H}_{\rho}=\mathscr{H}_{\rho}. \tag{2.32}$$

$\mathscr{H}_{\rho}$ est donc un invariant de Weyl.

Les invariants $\mathscr{H}_\rho$ sont fonctions propres d'un ensemble d'opérateurs qui peuvent être déterminés comme l'ont déjà montré Brody *et al* (1965). Il est important de remarquer que le calcul des symboles 3-j provient du développement de $\mathscr{H}'_\rho(t)$ développement qui donne aux symboles 3-j les formes les plus simples ce que l'on n'obtient pas par le développement des invariants de Weyl. Pour obtenir une expression $G_N^3(t)$ sous une forme compacte, il faut introduire des variables réelles et positives dans $G_N^3(t, U_N)$ et effectuer l'intégration dans l'espace de Bargmann comme le montrera ce qui va suivre.

3. Cas du groupe SU(2)

La fonction génératrice des éléments de la matrice de rotation $D^j_{m',m}(U_2)$ a pour expression

$$\Phi(x, z) = \exp[(xz')] = \sum_{jmm'} \mathscr{V}^j_{m'}(x) D^j_{m',m}(U_2) \mathscr{V}^j_m(z),$$

$$U_2(z) = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

avec

$$a_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi - \Psi)/2} \cos \theta/2, \qquad a_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi + \Psi)/2} \sin \theta/2; \tag{3.2}$$

ϕ, θ et Ψ sont les angles d'Euler.

Les éléments $D^j_{m',m}(U_2)$ forment un ensemble de polynômes orthogonaux (Edmonds 1957)

$$D^j_{m',m}(U_2) = D^j_{m',m}(\phi, \theta, \gamma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi m'} d^j_{m',m}(\theta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Psi m},$$

$$\mathrm{d}U_2 = \tfrac{1}{2} \sin \theta \, \mathrm{d}\theta \, (1/4\pi)\, \mathrm{d}\phi \, (1/4\pi)\, \mathrm{d}\Psi. \tag{3.3}$$

Les éléments de la base D_j sont fonctions propres du carré du moment angulaire J^2 et de sa projection J_z sur l'axe des z:

$$\mathscr{V}^j_m(z_1, z_2) = z_1^{j+m} z_2^{j-m} / [(j+m)!(j-m)!]^{1/2},$$

$$J^2 = J_z(J_z - 1) + J^1_+ J^1_-, \qquad J^1_+ = C_{12}, \tag{3.4}$$

$$J_z = \tfrac{1}{2}(C_{11} - C_{22}), \qquad J^1_- = C_{21}.$$

Dans ce qui va suivre, nous remplaçons $\Phi(x, z)$ par $\Phi(R_2 x, z)$, où R_2 est un paramètre réel et positif. Nous posons

$$y_1^2 = R_2 a_1 = \rho_1 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}, \qquad y_2^2 = R_2 a_2 = \rho_2 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}, \tag{3.5}$$

et

$$\rho_1 = R_2 \cos \theta/2, \qquad \rho_2 = R_2 \sin \theta/2,$$

$$\phi_1 = -(\phi - \Psi)/2, \qquad \phi_2 = -(\phi + \Psi)/2,$$

où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant \Psi \leqslant 4\pi$.

Il en résulte que

$$\Phi(R_2 x, z) = \exp(y_1^2 x_1 z_1 + y_2^2 x_1 z_2 - \overline{y_2^2} x_2 z_1 + \overline{y_1^2} x_2 z_2). \tag{3.6}$$

Le développement de cette expression permet d'écrire

$$R_2^{2j} D^j_{m',m}(U_2) = D^j_{m',m}(y_1^2, y_2^2, \overline{y_1^2}, \overline{y_2^2}) = D^j_{m',m}(y^2 \overline{y^2}). \tag{3.7}$$

De l'expression (3.6) découle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2\, \partial \overline{y_1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2\, \partial \overline{y_2^2}}\right)\Phi(R_2 x, z) = 0. \tag{3.8}$$

L'orthogonalité de $\mathscr{V}^j_m$ implique

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2\, \partial \overline{y_1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2\, \partial \overline{y_2^2}}\right) D^j_{m',m}(y^2, \overline{y^2}) = 0. \tag{3.9}$$

La résolution de l'équation différentielle (3.9) dans le cas général est exposée dans l'appendice 1. Nous remarquons que

$$\mathrm{d}y_1^2\, \mathrm{d}y_2^2 = (R_2^3/4) \sin\theta \, \mathrm{d}\phi_1 \, \mathrm{d}\phi_2 \, \mathrm{d}R_2 \tag{3.10}$$

et

$$\int D^{j_1}_{m'_1,m_1}(y^2, \overline{y^2}) D^{j_2}_{m'_2,m_2}(y^2, \overline{y^2}) \, \mathrm{d}\mu_2\,(y^2) = (2j_1+1)!\, \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_1}. \tag{3.11}$$

Le changement de domaine de variation de ϕ_1 et ϕ_2 à $0, 2\pi$ ne modifie pas le résultat de l'expression (3.11).

Ainsi les éléments $D^j_{m',m}(y^2, \overline{y^2})$ appartiennent à un espace homogène qui a la même mesure que l'espace de Bargmann. La fonction génératrice des symboles 3-j s'obtient par intégration de l'expression

$$\begin{aligned} G_2^3 &= \int \prod_{i=1}^{3} (\Phi(x^i, z^i)) \, \mathrm{d}\mu_2\,(y^2) \\ &= \int \exp\left(\sum_{i=1}^{3} (y_1^2 x_1^i z_1^i + y_2^2 x_1^i z_2^i - \overline{y_2^2} x_2^i z_1^i + \overline{y_1^2} x_2^i z_2^i) \right) \mathrm{d}\mu_2\,(y^2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous obtenons le deuxième membre de l'expression (3.12) en utilisant l'expression (3.6). En regroupant les coefficients de $y_1^2, y_2^2, \overline{y_1^2}, \overline{y_2^2}$ et en nous servant de l'expression (2.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} G_2^3 &= \exp\left(\sum_{ij} [(x_1^i z_1^i)(x_2^j z_2^j) - (x_1^i z_2^i)(x_2^j z_1^j)] \right) \\ &= \exp([x^1 x^2][z^1 z^2] + [x^1 x^3][z^1 z^3] + [x^2 x^3][z^2 z^3]) \\ &= \sum_{j_i m_i m'_i} (J+1)! \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{3} (\mathscr{V}^{j_i}_{m_i}(x^i) \mathscr{V}^{j_i}_{m'_i}(z^i)), \end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$J = j_1 + j_2 + j_3, \qquad [x^i x^j] = x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i.$$

La dernière expression (3.13) est obtenue en effectuant l'intégration de l'expression (3.12), où $\Phi(x^i, z^i)$ a été remplacé par son développement (3.1). Ensuite de la multiplication de (3.12) par $\Pi_{i=1}^{3}\ \mathscr{V}_{m_i}^{j_i}(z_i)$ et de l'intégration par rapport à $\Pi_{i=1}^{3}\ \mathrm{d}\mu_2\ (z_i)$ du résultat obtenu nous déduisons les invariants h^J pour

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

soit

$$h^J = \frac{1}{[(J+1)!]^{1/2}} \frac{[x^1x^2]^{J-2j_3}[x^1x^3]^{J-2j_2}[x^2x^3]^{J-2j_1}}{[(J-2j_3)!(J-2j_2)!(J-2j_1)!]^{1/2}}$$
$$= \sum_{j_i m_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \mathscr{V}_{m_1}^{j_1}(x^1)\mathscr{V}_{m_2}^{j_2}(x^2)\mathscr{V}_{m_3}^{j_3}(x^3). \tag{3.14}$$

Les invariants h^J sont les vecteurs normés appartenant au sous-espace invariant par la transformation

$$T_{U_2}^{(1,2,3)} = T_{U_2}^{(1)} \otimes T_{U_2}^{(2)} \otimes T_{U_2}^{(3)}. \tag{3.15}$$

La construction de la fonction génératrice de la base de représentation de SU(3) nous impose le développement qui suit:

La fonction génératrice des éléments de la base $\{W_{m_3}^{j_3}(x^1, x^2)\}$ de l'espace produit direct $D_{[j_1,j_2]} = D_{j_1} \otimes D_{j_2}$ se déduit de h^J en remplaçant x_1^3 par Z_1 et x_2^3 par $-Z_2$, en multipliant par $(J+1)!\Phi_{(j_3+1/2)}^{(j_1+j_2+1/2)}(t_1, t_2)\Phi_{(j_1-j_2)}^{j_3}(\tau_1, \tau_2)$ et en effectuant la sommation par rapport à j_i du résultat obtenu

$$\Psi = t_1 \exp[t_1t_2[x^1x^2] + t_1\tau_1(x^1Z) + t_1\tau_2(x^2Z)]$$
$$= \sum_{j_i m_i} \frac{(J+1)!}{[(2j_3+1)]^{1/2}} \Phi_{(j_3+1/2)}^{(j_1+j_2+1/2)}(t_1, t_2)\Phi_{(j_1-j_2)}^{j_3}(\tau_1, \tau_2)\Phi_{m_3}^{j_3}(Z)W_{m_3}^{j_3}(x^1, x^2). \tag{3.16}$$

C'est l'introduction du paramètre t_1 que nous faisons ici qui différencie cette expression de la fonction génératrice des symboles 3-j de l'expression qu'a construite Schwinger (1965) (voir relation (4.6)).

$W_{m_3}^{j_3}$ est fonction propre de

$$J^2 = J^3(J^3-1) + J^+J^- = J_z(J_z-1) + J^+J^-, \tag{3.17}$$

avec

$$J_+ = C_{12}, \qquad J_- = C_{21}, \qquad J_z = \tfrac{1}{2}(C_{11} - C_{22}),$$
$$J^+ = C^{12}, \qquad J^- = C^{21}, \qquad J^z = \tfrac{1}{2}(C^{11} - C^{22}).$$

A l'aide des relations (2.6) nous pouvons mettre Ψ sous la forme

$$\Psi = \int t_1\{\exp[t_1t_2[\overline{\xi^1}\,\overline{\xi^2}] + t_1\tau_1(Z\overline{\xi^1}) + t_1\tau_2(Z\overline{\xi^2})]\exp[(\xi^1x^1) + (\xi^2x^2)]\}\,\mathrm{d}\mu_4\,(\xi)$$
$$= \mathscr{L}(t, \tau, Z, (\xi^1, \xi^2))\exp[(\xi^1x^1) + (\xi^2x^2)]. \tag{3.18}$$

Nous remarquons que la fonction génératrice $W_{m_3}^{j_3}(x^1, x^2)$ s'obtient par application de l'opérateur $\mathscr{L}(t, \tau, Z, (\xi^1, \xi^2))$ à la fonction génératrice du produit $\Pi_{i=1}^{2}\ \mathscr{V}_{m_i}^{j_i}(x^i)$.

4. Cas du groupe SU(3)

4.1. *Fonction génératrice de la base $D_{[\lambda,\mu]}$*

Les vecteurs de base $\mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(t,t_0,y)}(z^1, z^2)$ de l'espace $D_{[\lambda,\mu]}$ sont fonctions propres de l'opérateur de Casimir du second ordre T^2, de la projection T_0 de $\boldsymbol{T}$ sur l'axe des z, du triple de l'opérateur hypercharge Y et ont pour valeurs propres respectivement $t(t+1)$, t_0 et y. Nous avons

$$\begin{aligned} &z^1 = (z^1_1, z^1_2, z^1_3), \qquad z^2 = (z^2_1, z^2_2, z^2_3), \\ &T_+ = C_{12}, \qquad T_- = C_{21}, \qquad T_0 = \tfrac{1}{2}(C_{11} - C_{22}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'opérateur de Casimir du second ordre s'écrit

$$T^2 = T_0(T_0 + 1) + T_+T_-,$$

de plus

$$Y = \sum_{i=1}^{3} C_{ii} - 3C_{33}. \tag{4.2}$$

D'après la relation (2.17) des préliminaires,

$$C^{12}\mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)} = 0. \tag{4.3}$$

Les vecteurs $\mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(t,t_0,y)}(z^1, z^2)$ appartiennent à l'espace $D_{t_1}\otimes D_{t_2}\otimes D_{t_3}$ qui a pour éléments de base $\mathscr{V}^{t_1}_{m_1}(z^1_1, z^1_2)\mathscr{V}^{t_2}_{m_2}(z^2_1, z^2_2)\mathscr{V}^{t_3}_{m_3}(z^3_1, z^3_2)$ et pour fonction génératrice $\exp[\Sigma^3_{i=1}(x_i z_i)]$.

La fonction génératrice des fonctions propres $W^t_{t_0}(z_1, z_2)$ de T^2 et de T_0 se déduit par l'application de l'opérateur $\mathscr{L}(t, \tau, Z, (x_1, x_2))$ (cf relation (3.18)) à $\exp[\Sigma^3_{i=1}(x_i z_i)]$:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = t_1 \exp[t_1 t_2 \Delta^{(1,2)}_3 + t_1 Z_1(\tau z_1) + t_1 Z_2(\tau z_2)] \exp[(x_3 z_3)], \\ &\Delta^{(1,2)}_3 = (z^1_1 z^2_2 - z^1_2 z^2_1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

En tenant compte des relations (3.17) et (4.3) et en appliquant à l'expression (4.4) l'opérateur $\mathscr{L}(t', Z', \tau^2_1, (\tau, x^3))$ on peut obtenir la fonction génératrice des vecteurs de base $\mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(t,t_0,y)}(z^1, z^2)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\Phi_1 = t_1 t'_1 \exp\{&t_1 t_2 \Delta^{(1,2)}_3 + t'_1 t'_2[(t_1 Z_1 z^1_1 + t_1 Z_2 z^1_2)z^2_3 - (t_1 Z_1 z^2_1 + t_1 Z_2 z^2_2)z^1_3] \\ &+ t'_1 Z'_1[\tau^2_1(t_1 Z_1 z^1_1 + t_1 Z_2 z^1_2) + \tau^2_2(t_1 Z_1 z^2_1 + t_1 Z_2 z^2_2)] \\ &+ t'_1 Z'_2(\tau^2_1 z^1_3 + \tau^2_2 z^2_3)\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pour que la relation (4.3) soit satisfaite τ^2_2 doit être égal à zéro et nous obtenons la fonction génératrice $G_3(t)$:

$$\begin{aligned} G_3(t) = t_1 t'_1 \exp[&t_1 t_2 \Delta^{(1,2)}_3 + t'_1 t'_2 t_1(Z_2\Delta^{(1,2)}_1 - Z_1\Delta^{(1,2)}_2) \\ &+ t_1 t'_1 Z'_1 \tau^2_1(Z_1 z^1_1 + Z_2 z^1_2) + t'_1 Z'_2 \tau^2_1 z^1_3] \\ = \sum_{\substack{pqt\\ \lambda\mu}} &(-1)^q \frac{(\mu+p+1)!\,(\mu+\lambda-q+1)!}{[(\lambda+1)(2t+1)]^{1/2}} \\ &\times \frac{t^q_2 t'^{\mu-q}_2 Z'^p_1 Z'^{\lambda-p}_2 t^{\mu+p+1}_1 t'^{(\mu+\lambda-q+1)}_1 Z^{t+t_0}_1 Z^{t-t_0}_2 \tau^{2\lambda}_1}{[q!\,(\mu-q)!\,p!\,(\lambda-p)!\,(\mu+p+1)!\,(\mu+\lambda-q+1)!\,(t+t_0)!\,(t-t_0)!\,\lambda!]^{1/2}} \\ &\times \mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}(z^1, z^2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nous avons

$$\mathbf{\Delta}^{(1,2)}=(\Delta_1^{(1,2)},\Delta_2^{(1,2)},\Delta_3^{(1,2)})=((z_2^1z_3^2-z_3^1z_2^2),(z_3^1z_1^2-z_3^2z_1^1),(z_1^1z_2^2-z_2^1z_1^2)).$$

Dans le cas où $z^1=(z_1^1,\ldots,z_n^1)$ et $z^2=(z_1^2,\ldots,z_n^2)$ les mêmes procédés de calcul conduisent à la fonction génératrice de la base $\mathscr{V}_{(\alpha)}^{\lambda\mu}(z^1,z^2)$.

4.2. Eléments de la base de la représentation $D^{\lambda\mu}$

La paramétrisation de SU(3) est déjà connue. Dans ce travail, nous reprenons la paramétrisation de Nelson (1967) à laquelle nous apportons quelques modifications qui vont nous permettre d'établir une nouvelle paramétrisation de SU(N).

Nous pouvons écrire la matrice $U_3=(U_{ij}^3)$ sous la forme

$$(U_{ij}^3)=U_2(\Omega)g_3U_2(\Omega')\mathscr{C}_3, \tag{4.7}$$

$$(U_{ij}^3)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0\\ -\overline{a_2} & \overline{a_1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & b_2\\ 0 & -\overline{b_2} & \overline{b_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0\\ -\overline{c_2} & \overline{c_1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_1 & 0\\ 0 & 0 & (\overline{d_1})^2\end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

avec

$$a_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\psi)/2}\cos\theta/2,\qquad b_1=\cos\nu/2,\qquad c_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi'-\psi')/2}\cos\theta'/2,\qquad d_1=e^{i\beta},$$
$$a_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi+\psi)/2}\sin\theta/2,\qquad b_2=\sin\nu/2,\qquad c_2={}^{-\mathrm{i}(\phi'+\psi')/2}\sin\theta'/2, \tag{4.9}$$

les modifications portent sur la matrice

$$g_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & b_2\\ 0 & -\overline{b_2} & \overline{b_1}\end{pmatrix}$$

que Nelson (1967) écrivait

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2\\ 0 & 1 & 0\\ -\overline{b_2} & 0 & \overline{b_1}\end{pmatrix}$$

et $U_2(\Omega)=U_2^*(\Omega)$.

Comme dans le chapitre précédent (voir (3.5)) nous remplaçons dans l'expression (4.6)

$$t_2,\quad Z_2',\quad Z_1,\quad Z_2$$

respectivement par

$$t_2R_3,\quad Z_2'R_3,\quad Z_1R_2\sqrt{R_3},\quad Z_2R_2\sqrt{R_3}. \tag{4.10}$$

Dans la fonction génératrice des éléments de la base $\mathscr{V}_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ nous posons $\mu=q$ et $p=0$ et nous écrivons

$$y_3^3=R_3\cos(\nu/2)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta},\qquad y_2^3=R_3\sin(\nu/2)\cos(\theta'/2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta+(\phi'-\psi')/2+\pi]},$$
$$y_1^3=R_3\sin(\nu/2)\sin(\theta'/2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\beta+(\phi'+\psi')/2]} \tag{4.11}$$

En tenant compte de la deuxième propriété des transformations unitaires (§ 2) nous pouvons écrire que

$$G_3(t, U_3)_{\left(\substack{p=0\\ \mu=q}\right)} = t_1 t_1' \exp[(t_1 t_2(\overline{y_1^3}\Delta_3^{(1,2)} + \overline{y_2^3}\Delta_2^{(1,2)} + \overline{y_3^3}\Delta_1^{(1,2)} + (y_3^3 z_1^1 + y_2^3 z_2^1 + y_1^3 z_3^1) t_1' Z_2' \tau_1^2]. \tag{4.12}$$

Par déduction,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^3\, \partial \overline{y_1^3}} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^3\, \partial \overline{y_2^3}} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^3\, \partial \overline{y_3^3}}\right) G_3(t, U_3)_{\left(\substack{p=0\\ \mu=q}\right)} = 0. \tag{4.13}$$

Les éléments de base de $\mathscr{V}_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ étant orthonormés, nous pouvons écrire

$$\Delta_1(R_3^{(\lambda+\mu)} D_{(\alpha),(\alpha_0')}^{\lambda\mu}(U_3)) = 0, \qquad (\alpha_0') = (0, 0, -2(\lambda - \mu)), \quad (\alpha) = (t, t_0, y). \tag{4.14}$$

La résolution de cette équation (voir appendice 1) nous donne l'expression des éléments:

$$D_{(t,t_0,y),(0,0,-2(\lambda-\mu))}^{\lambda\mu}(\nu, \theta', \psi, \phi, \beta) = (1/\sin \nu/2) d_{(m_1+2t+1)/2,(m_1-2t-1)/2}^{(\lambda+\mu+1)/2}(\nu)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_1\phi_1 + m_2\phi_2 + m_3\phi_3)} d_{(m_2+m_3)/2,t_0}^{t}(\theta), \tag{4.15}$$

avec $m_1 = \frac{1}{3}(\lambda - \mu - y)$, $m_2 + m_3 = \frac{1}{3}[y + 2(\lambda - \mu)]$, $m_2 - m_3 = 2t_0$ et où $d_{m',m}^{l}(\theta) = D_{m',m}^{j}(0, \theta, 0)$ (voir Edmonds 1957). Ces éléments sont orthogonaux par rapport à la mesure

$$\mathrm{d}\mu_3\,(y^3) = \mathrm{d}\mu_1\,(y_1^3)\,\mathrm{d}\mu_1\,(y_2^3)\,\mathrm{d}\mu_1\,(y_3^3). \tag{4.16}$$

Puisque $\mathscr{V}_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ est fonction propre de T^2 et de T_0 nous pouvons en déduire que les éléments $D_{(\alpha),(\alpha')}^{\lambda\mu}(U_3)$ sont orthogonaux par rapport à

$$\mathrm{d}\mu^3\,(y) = \mathrm{d}\mu_3\,(y^3)\,\mathrm{d}\mu_2\,(y^2). \tag{4.17}$$

L'équation différentielle (4.13) donne les éléments $D_{(\alpha),(\alpha_0')}^{\lambda\mu}(U_3)$ à un facteur de phase près dont la détermination s'effectue à partir des éléments de la matrice (U_{ij}^3): ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont donnés par

$$\phi_1 = -2\beta, \qquad \phi_2 = \beta + (\phi' - \psi')/2 + \pi, \qquad \phi_3 = \beta + (\phi' + \psi')/2. \tag{4.18}$$

Le calcul des éléments $D_{(\alpha),(\alpha_0')}^{\lambda\mu}(U_3)$ dans le cas général est exposé dans l'appendice 2.

Les éléments de l'expression (4.15) sont équivalents aux fonctions harmoniques de Beg et Ruegg (1965), et ceci confirme le résultat déjà obtenu par Nelson (1967) après un long calcul.

4.3. Fonction génératrice des symboles 3-j

Un des intérêts de notre approche réside dans le détermination de la fonction génératrice des symboles 3-j à l'aide de la méthode d'intégration. Dans l'exposé du cas $p = 0$ ou $\mu = q$ s'illustre la simplicité de la méthode. Nous utiliserons la relation (2.30) comme nous l'avons déjà utilisée pour calculer les symbols 3-j du groupe SU(2) (voir relation (3.12)). Nous posons

$$[j] = 2(j-1) + 1, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{4.19}$$

la fonction génératrice $G_3^j(t^j, U_3)$ (voir (4, 6)),

$$G_3^j(t^j, U_3) = t^j t'^j \exp\left(\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i^j(\Delta_i^{[j],[j]+1})' + \beta_i^j(z_i^{[j]})')\right). \tag{4.20}$$

Si dans notre traitement nous nous limitons au cas où $q = \mu$, nous avons à calculer l'expression

$$G_3(t) = \int [t] \exp\left(\sum_{j=1}^{3} R_3(\alpha_3^j(\Delta_3^{[j],[j]+1})' + \beta_3^j(z_3^j)') + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} R_2\sqrt{R_3}\beta_i^j(z_i^{[j]})'\right) \mathrm{d}\mu^3(y), \tag{4.21}$$

où

$$[t] = \prod_{j=1}^{3} t^j t'^j.$$

Nous notons $(z)^1$ et $(z)^2$ les transformés d'un vecteur (z) par U_3 et par U_2, et nous écrivons

$$U_3 = U^2 U^3, \qquad U^2 = U_2$$

et

$$R_2(z_1^{[j]})' = y_1^2(z_1^{[j]})^2 + y_2^2(z_2^{[j]})^2, \qquad R_2(z_2^{[j]})' = -\overline{y_2^2}(z_1^{[j]})^2 + \overline{y_1^2}(z_2^{[j]})^2. \tag{4.22}$$

Reportant les expressions (4.22) dans l'expression (4.21) et effectuant l'intégration par rapport à y_i^2 comme dans l'expression (3.12), nous obtenons

$$G_3(t) = \int [t] \exp\left(\sum_{j=1}^{3} R_3(\alpha_3^j(\Delta_3^{([j],[j]+1)})' + \beta_3^j(z_3^{[j]})') \right.$$
$$\left. + \sum_{k<j} R_3(\beta_1^j\beta_2^k - \beta_1^k\beta_2^j)(\Delta_3^{[j],[k]})'\right) \mathrm{d}\mu_3(y^3). \tag{4.23}$$

Dans (4.23) nous avons

$$(\Delta_3^{([j],[k])})' = (z_1^{[j]})^2(z_2^{[k]})^2 - (z_1^{[k]})^2(z_2^{[j]})^2 = U_3(z_1^{[j]}z_2^{[k]} - z_1^{[k]}z_2^{[j]}). \tag{4.24}$$

D'après la deuxième propriété des groupes unitaires (voir § 2),

$$R_3(z_3^{[j]})' = \sum_i y_i^3(z_i^{[j]}), \qquad R_3(\Delta_3^{[j],[j]+1})' = \sum_i \overline{y_i^3}(\Delta_i^{[j],[j+1]+1}),$$

de même

$$R_3(\Delta_3^{[j],[k]})' = \sum_i \overline{y_i^3}(\Delta_i^{[j],[k]}). \tag{4.25}$$

Reportant les expressions précédentes dans (4.23) et effectuant l'intégration à l'aide de la relation (2.6) il vient

$$G_3(t) = [t] \exp\left(\sum_{jk} \alpha_3^j\beta_3^k\Delta_4^{([j],[j]+1,[k])} + \det(\beta^1, \beta^2, \beta^3)\Delta_4^{(1,3,5)}\right); \tag{4.26}$$

$\det(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$ est le déterminant construit à partir des composantes des trois vecteurs $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \beta_3^i)$, $i = 1, 2, 3$.

Nous avons exactement le même procédé si au lieu du cas $q = \mu$ nous traitons le cas $p = 0$.

Le développement de $G_3(t)$ s'exprime en fonction des invariants de Weyl $\mathcal{H}_\rho$ (2.31). Moshinsky (1963) a construit l'opérateur X tel que

$$X\,.\,\mathcal{H}_\rho = X(\rho)\,.\,\mathcal{H}_\rho. \tag{4.27}$$

Les valeurs propres $X(\rho)$ de X sont distinctes.

En utilisant cet opérateur, nous pouvons séparer les différents invariants $\mathcal{H}_\rho$, ce qui permet le calcul des symboles 3-j.

5. Cas du groupe SU(N)

Pour déterminer les symboles 3-j dans le cas général, nous sommes amenés à considérer un ensemble de paramètres qui nous permet de construire la matrice (U^N_{ij}) de SU(N) d'une part et de déterminer la mesure invariante sur le groupe d'autre part.

5.1. Paramétrisation du groupe SU(N)

Nous faisons remarquer tout d'abord que si le nombre de paramètres dont dépend $U_{(N-1)}$ est $u=(N-1)^2-1$ et si le nombre de paramètres dont dépend U_N est $v=N^2-1$, la différence $v-u=2N-1$ correspond au nombre d'angles d'un vecteur appartenant à C_n dont le module est égal à 1.

Pour $N=3$ ce vecteur est $(U^3_{31}, U^3_{32}, U^3_{33})$ qui compose la dernière ligne de la matrice de $U_3=(U^3_{ij})$ et

$$U_3 = U^2U^3 = U_2(g_3U^2\mathscr{C}_3), \qquad U^2 = U_2. \tag{5.1}$$

Pour $N \geqslant 3$ nous posons U_N sous la forme récurrente

$$U_N = U_{N-1}U^N = U_{N-1}(g_NU^{N-1}\mathscr{C}_N). \tag{5.2}$$

Nous imposons au vecteur qui compose la dernière ligne de la matrice (U^N_{ij}) de dépendre des $2N-1$ paramètres qu'il faut ajouter à ceux dont depend U_{N-1} pour trouver ceux dont dépend U_N. Nous notons $\Delta^{(1,\ldots,N)}_{N+1}$ le déterminant de la matrice (z^i_j), i, $j=1,\ldots,N$, et $\Delta^{(1,\ldots,N-1)}_i$ le cofacteur de z^N_i.

D'après la deuxième propriété des transformations unitaires (voir § 2) nous écrivons

$$(z^i_N)' = \sum_{j=1}^{N} U^N_{Nj}z^i_j, \qquad (\Delta^{(1,\ldots,N-1)}_N)' = \sum_{j=1}^{N} \overline{U^N_{Nj}}\Delta^{(1,\ldots,N-1)}_j \tag{5.3}$$

Les matrices $\mathscr{C}_N$ et g_N sont

$$\mathscr{C}_N = \begin{pmatrix} e^{i\beta_N} & 0\cdots\cdots 0 & \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & e^{i\beta_N} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{-i(N-1)\beta_N} \end{pmatrix},$$

$$g_N = \begin{pmatrix} I_{N-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\nu_N/2 & \sin\nu_N/2 \\ 0 & -\sin\nu_N/2 & \cos\nu_N/2 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

avec $0 \leqslant \nu_N \leqslant \pi$; I_{N-2} est la matrice unité d'ordre $n-2$.

Il est simple de vérifier que la transformation U_N est unimodulaire et que la dernière ligne de la matrice U_N ne dépend que des paramètres à ajouter à ceux de la transformation U_{N-1} pour obtenir ceux de la transformation U_N.

5.2. La mesure invariante

Les éléments $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ de la base de l'espace $D_{[h]}$ tels que

$$C_{ii}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = k_i\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}, \qquad C_{ij}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = 0, \qquad i<j, \tag{5.5}$$

où k_i est défini dans (2.13), forment les éléments de poids maximal de la base et ont pour fonction génératrice:

$$G_N(t)_m = \exp\left(\sum_{i=3}^{N} t'_i \Delta_i^{(1,\dots,i-1)} + \sum_{j=1}^{N} t_j(z_j^1)\right), \tag{5.6}$$

$$G_N(t, U_N)_m = \exp\left(\sum_{i=3}^{N} t'_i (\Delta_i^{(1,\dots,i-1)})' + \sum_{j=1}^{N} t_j(z_j^1)'\right). \tag{5.7}$$

Nous remplaçons t'_i par $t'_i\beta_i$ et t_j par $t_j\beta_j$, avec

$$\beta_1 = \beta_2 = R_2\sqrt{R_3},$$

et pour $j \geqslant 3$

$$\beta_j = R_j[(\beta(j+1)]^{1/2}, \qquad \beta_N = R_N, \qquad y_i^N = U^N_{N_i}R_N, \tag{5.8}$$

où les paramètres R sont réels et positifs.

Si nous nous limitons au cas particulier où les t_i et les t'_i sont nuls sauf pour $i = N$ et si nous tenons compte des relations (5.3), nous avons

$$\begin{aligned} G_N(t, U)_m &= \exp[\beta_N t'_N (\Delta^{(1,\dots,N-1)})' + t_N\beta_N(z^1_N)'] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^{N} t'_N \Delta_j^{(1,\dots,N-1)} \overline{y_j^N} + t_N z_j^1 y_j^N\right]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nous remarquons que

$$\Delta_{N-2}(G'_N(t, U_N)_m) = \left(\sum \frac{\partial^2}{\partial y_i^N \partial \overline{y_i^N}}\right) G'_N(t, U_N)_m = 0,$$

et de l'orthogonalité des éléments $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ nous déduisons que

$$\Delta_{N-2} R_N^{(h_1+h_{N-1})} D^{[h_1,0,0,\dots,h_{N-1}]}_{(\alpha),(\alpha\dot{0})}(U_N) = 0. \tag{5.10}$$

La résolution de l'équation (5.10) est développée dans l'appendice 1. Les solutions de cette équation sont orthogonales par rapport à la mesure $d\mu_N\ (y^N)$ il en résulte que les éléments $D^{[h]}_{(\alpha),(\alpha')}(U_N)$ sont orthogonaux par rapport à la mesure

$$d\mu^N\ (y) = \prod_{i=2}^{N} d\mu_i\ (y^i) = \prod_{i=2}^{N} (e^{-R_i^2} R_i^{2i-1})\, dU'_N. \tag{5.11}$$

Nous pouvons calculer $dU_N = A_N\, dU'_N$ sachant que $\int dU_N = 1$.

Les opérateurs infinitésimaux C_{ij} ont pour correspondants les opérateurs C_{ij} qui se déduisent de la relation

$$C_{ij}G'_N(t, U)_m = \hat{C}_{ij}G'_N(t, U)_m. \tag{5.12}$$

Nous obtenons

$$\hat{C}_{ij} = (y_j^N \partial/\partial y_i^N - \overline{y_i^N}\partial/\overline{\partial y_j^N}).$$

Les éléments $D^{[h]}_{(\alpha),(\alpha\acute{o})}(U_N)$ forment un ensemble de fonctions harmoniques. Ce résultat est la généralisation à SU(N) des résultats de Beg et Ruegg (1965) pour SU(3).

5.3. Fonction génératrice des symboles 3-j

Nous considérons la fonction génératrice $G_N^k(t, U)_m$ déduite de l'expression (5.7),

$$G_N^k(t, U_N)_m = \exp\Big(\sum_{i=3}^{N} t_i'^k \beta_i (\Delta_i^{([k],[k]+1,\ldots,[k]+i-2)})' + \sum_{j=1}^{N} t_j^k \beta_j (z_j^{[k]})'\Big), \tag{5.13}$$

où

$$[k] = (k-1)(N-1)+1, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Les éléments des déterminants $\Delta_i^{([k],[k]+1,\ldots,[k]+i-2)}$ sont $(z_n^{[k]+m})$ avec $0 \leqslant m \leqslant i-1$ et $1 \leqslant n \leqslant i$.

En utilisant l'expression (2.30) et les relations (5.3) nous pouvons écrire

$$\int \prod_{k=1}^{3} G_N^k(t, U_N)_m \, \mathrm{d}\mu^N(y)$$

$$= \int \exp\Big(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{N} (\delta_j^k) + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} t_j^k \beta_j (z_j^{[k]})'\Big) \prod_{j=2}^{N} \mathrm{d}\mu_j(y^j), \tag{5.14}$$

avec

$$\delta_j^k = t_j'^k \beta_j (\Delta_j^{([k],[k]+1,\ldots,[k]+i-2)})'. \tag{5.15}$$

Comme dans le cas de SU(3) nous sommes amenés à effectuer l'intégration par parties en utilisant les relations (5.3):

$$G_N^3(t)_m = \int \Big\{ \exp\Big(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=3}^{N} (\delta_j^k)'\Big)\Big[\int \exp\Big(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} t_j^k \beta_j (z_j^{[k]})'\Big)\, \mathrm{d}\mu_2(y^2)\Big]\Big\} \prod_{i=3}^{N} \mathrm{d}\mu_i(y^i)$$

$$= \int \Big\{ \exp\Big(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=4}^{N} (\delta_j^k)'\Big)\Big[\int \exp\Big(\sum_k \delta_3^k + \sum_{k_1k_2} \beta_3 t_1^{k_1} t_2^{k_2} (\Delta_2^{([k_1],[k_2])})'\Big)\, \mathrm{d}\mu_3(y^3)\Big]\Big\}$$

$$\times \prod_{i=4}^{N} \mathrm{d}\mu_i(y^i) = \int \Big\{ \exp\Big(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=5}^{N} (\delta_j^k)'\Big)$$

$$\times \Big[\int \exp\Big(\sum_k \delta_4^k + \sum_{k_1k_2} \beta_4 t_3'^{k_1} t_3'^{k_2} \Delta_4^{([k_1],[k_1]+1,[k_2])}$$

$$+ \sum_{k_1k_2k_3} \beta_4 t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} \Delta_4^{([k_1],[k_2],[k_3])}\Big)\, \mathrm{d}\mu_4(y^4)\Big]\Big\} \prod_{i=5}^{N} \mathrm{d}\mu_i(y^i). \tag{5.16}$$

Après intégration, nous obtenons

$$G_N^3(t)_m = \exp\Big(\sum_{k_N k'_N} t_N'^{k_N} t_N^{k'_N} (\Delta_{N+1}^{([k_N],[k_N]+1,\ldots,[k_N]+N,[k'_N])})$$

$$+ \sum_{\substack{k_{N-1}k'_{N-1} \\ k'_N}} t_{N-1}'^{k_{N-1}} t_{N-1}^{k'_{N-1}} t_N^{k'_N} (\Delta_{N+1}^{([k_{N-1}],[k_{N-1}]+1,\ldots,[k_{N-1}]+N-1,[k'_N])})\Big). \tag{5.17}$$

Ces calculs montrent que l'intégration ne présente pas de difficultés particulières. Nous pensons qu'il existe une méthode simple pour effectuer l'intégration dans le cas général sachant que la construction de la fonction génératrice $G_N(t, U_N)$ peut être déduite de la base de la représentation du groupe unitaire dans l'espace des bosons (ou l'espace de Bargmann).

6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une nouvelle approche dans la détermination des symboles 3-j des groupes unimodulaires. Notre approche consiste à partir de la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation préalablement déduite de la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation dans l'espace de Bargmann (1962), puis à utiliser l'intégrale de Gaunt pour obtenir la fonction génératrice des invariants de Weyl. Dans l'étude du cas SU(N), nous avons introduit une nouvelle paramétrisation du groupe SU(N). Cette paramétrisation récurrente, peut être symboliquement décrite par $U_N = U^N$ et $U_{N-1} = U^{N-1}$. $U^{N-2} \ldots U^2$ où la dernière ligne de la matrice de la transformation U_N notée (U_{ij}^N) dépend des $2N-1$ paramètres qui complètent les paramètres de U_{N-1}.

L'intérêt de la méthode apparaît quand l'ayant appliquée à l'étude du groupe SU(2), nous avons obtenu la fonction génératrice de Schwinger (1965) à partir de laquelle, nous avons construit la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation de SU(3). A partir de la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation de SU(3), nous avons démontré simplement que les fonctions harmoniques déduites par Beg et Ruegg (1965) sont des éléments de la matrice de représentation, ce qui confirme la conclusion que Nelson (1967) a obtenue par une méthode nécessitant un calcul complexe dans le cas de SU(3). Et nous montrons que cette conclusion est valable dans le cas général et nous en déduisons la mesure invariante sur le groupe SU(N). Nous donnons ausi l'expression des éléments de la matrice de représentation de SU(3).

Dans le travail de recherche des fonctions génératrices des invariants de Weyl, il nous a paru important d'étudier des cas particuliers qui illustrent bien l'intérêt de notre méthode. Dans l'étude de ces cas particuliers, nous avons été amenés à introduire des paramètres qui nous permettent d'utiliser les propriétés de l'espace de Bargmann (1962) dans le calcul de l'intégrale de Gaunt, ce qui nous donne une expression compacte et simple des fonctions génératrices. L'étude complète des fonctions génératrices des invariants de Weyl, qui n'est pas traitée ice, fera l'object d'un travail ultérieur.

Appendice 1

Nous cherchons les solutions de l'équation $\Delta p\psi = 0$, sachant que

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^{p+2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \, \partial \bar{y}_i}, \tag{A1.1}$$

et

$$
\begin{aligned}
y_1 &= R\,e^{i\phi_1}\cos\theta_1,\\
y_2 &= R\,e^{i\phi_2}\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
y_3 &= R\,e^{i\phi_3}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\vdots\\
y_{p+1} &= R\,e^{i\phi_{(p+1)}}\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_p\cos\theta_{p+1},\\
y_{p+2} &= R\,e^{i\phi_{(p+2)}}\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{p+1}.
\end{aligned}
\tag{A1.2}
$$

Pour exprimer Δ_p en coordonnées polaires, nous devons calculer la métrique $ds^2=\Sigma_{i=1}^{p+2}\,dy_i\,d\bar{y}_i$.

Si nous posons

$$
y_i = R\beta_i^1, \qquad ds^2=(dR)^2+R^2(ds'^2),
$$
$$
ds'^2=\sum_{i=1}^{p+1} d\beta_i^1\,\overline{d\beta_i^1}, \qquad \beta_j^{i-1}=\sin\theta_i\beta_j^i, \qquad i\leqslant j\leqslant p+2, \tag{A1.3}
$$

nous pouvons écrire

$$
\sum_{i=1}^{p+1}(d\beta_i^1\,\overline{d\beta_i^1})=d\theta_1^2+\cos^2\theta_1\,d\phi_1^2+\sin^2\theta_1\left(\sum_{i=2}^{p+2}d\beta_i^2\,\overline{d\beta_i^2}\right), \tag{A1.4}
$$

$$
\sum_{i=1}^{p+2}(d\beta_i^2\,\overline{d\beta_i^2})=d\theta_2^2+\cos^2\theta_2\,d\phi_2^2+\sin^2\theta_2\left(\sum_{i=3}^{p+2}d\beta_i^3\,\overline{d\beta_i^3}\right). \tag{A1.5}
$$

Sachant que $d\beta_{p+2}^{p+2}\,\overline{d\beta_{p+2}^{p+2}}=d\phi_n^2$, nous pouvons calculer ds^2 et l'expression de Δ_p en coordonnées polaires. En tenant compte du fait que $ds^2=\Sigma_{ij}\,g_{ij}\,dx_i\,dy_j$ est une métrique, l'opérateur de Laplace–Beltrami s'écrit

$$
\Delta=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad g=\det(g_{ij}), \qquad g^{ij}=(g^{-1})_{ij}.
$$

Si nous posons $\Delta_p(R^n\Psi_n(\theta_1,\ldots,\theta_{p+1},\phi_{p+2}))=0$, pour $p=0$

$$
\Psi_n(\theta_1,\phi_1,\phi_2)=e^{i(m_1\phi_1+m_2\phi_2)}\,d^{n/2}_{(m_1-m_2)/2,(m_1+m_2)/2}(2\theta_1), \tag{A1.6}
$$
$$
d^j_{m',m}(\theta)=D^j_{m',(0,\theta,0)}
$$

(voir Edmonds 1957), et dans le cas général

$$
\begin{aligned}
\Psi_n(\theta_1,\ldots,\theta_{p+1},\phi_1\ldots\phi_{(p+2)})
&=\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(\sin\theta_j)^{[j]}}d^{(n_j+[j])/2}_{(m_j+[m_j])/2,(m_j-[m_j])/2}(2\theta_j)\\
&\quad\times d^{n_{(p+1)}/2}_{(m_{(p+1)}+m_{(p+2)})/2,(m_{(p+1)}-m_{(p+2)})/2}(2\theta_{p+1})\exp\left(i\sum_{k=1}^{p+2}m_k\phi_k\right),
\end{aligned}
\tag{A1.7}
$$

où $[j]=p+1-j$, $[m_j]=n_{j+1}+[j]$, $n_1=n$.

Les n_i sont des constantes entières et $n_1\geqslant n_2\geqslant n_3\ldots\geqslant n_{p+1}\geqslant 0$ Les fonctions Ψ_n sont orthogonales entre elles et sont fonctions propres de l'opérateur de Laplace–

Beltrami Δ'_p qui a pour métrique ds'^2. La fonction de poids est

$$g_p = \prod_{i=1}^{p+1} (\sin\theta_i \cos\theta_i) \prod_{i=1}^{p} (\sin\theta_i)^{2(p+1-i)}. \tag{A1.8}$$

Appendice 2. Elements de la matrice de représentation de SU(3)

Soit $G_1 = \exp(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{(1,2)} + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{z}^1)t_1 t'_1$ la fonction génératrice de la base de représentation $\mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}$ de SU(3) (relation (4.6)), avec

$$r_1 = t'_1 t'_2 t_1 Z_2, \qquad r_2 = t'_1 t_1 t'_2 Z_1, \qquad r_3 = t_1 t_2,$$
$$s_1 = t_1 t'_1 Z'_1 \tau_1^2 Z_1, \qquad s_2 = t_1 t'_1 Z'_1 \tau_1^2 Z_2, \qquad s_3 = t'_1 Z'_2 \tau_1^2.$$

D'après l'expression (2.26) nous écrivons

$$G_1 = \sum_{\lambda\mu(\alpha)} (t, Z, \tau_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha)} \mathscr{V}^{[\lambda\mu]}_{(\alpha)}(z^1, z^2). \tag{A2.1}$$

Dans G_1 nous remplaçons respectivement

$$t_1, t'_1, t_2, t'_2, Z_1, Z_2, Z'_1, Z'_2, \tau_1^2, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3,$$

par

$$\overline{p_1}, \overline{p'_1}, \overline{p_2}, \overline{p'_2}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x'_1}, \overline{x'_2}, \overline{\gamma_1^2}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3},$$

nous obtenons la fonction génératrice de $\mathscr{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha')}$ que nous notons

$$G'_1 = \overline{p_1}\overline{p'_1} \exp[\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{(1,2)} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{z}^1] \tag{A2.2}$$

ou bien

$$G'_1 = \sum_{\substack{\lambda\mu \\ (\alpha')}} (p, \bar{Z}, \overline{\gamma_1^2})^{[\lambda\mu]}_{(\alpha')} \mathscr{V}^{[\lambda\mu]}_{(\alpha')}(z^1, z^2). \tag{A2.3}$$

La fonction génératrice des éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha),(\alpha')}(U_3)$ est

$$D = \int (T_{U_3} G_1)\overline{G'_1}\, d\mu(z) \tag{A2.4}$$

soit

$$D = \sum_{\substack{\lambda\mu(\alpha) \\ (\alpha')}} (t, Z, \tau_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha)} (p, Z, \gamma_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha')} D^{\lambda\mu}_{(\alpha),(\alpha')}(U_3). \tag{A2.5}$$

(A2.5) est obtenu en remplaçant G_1 et G'_1 par leur développement respectif (voir relations (A2.1) et (A2.3)).

Le calcul de l'intégrale s'effectue par la méthode de la dérivation sous le signe somme en considérant les composantes de $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ comme des paramètres et en utilisant la relation (2.7). Nous obtenons

$$D = \frac{t_1 t'_1 p_1 p'_1}{(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}')^2} \exp\left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s}' - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}'\, \boldsymbol{s}')}{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}\right), \tag{A2.6}$$

avec

$$S' = {}^tU_3(s'), \qquad r' = {}^tU_3(r).$$

La comparaison du développement de l'expression ci-dessus (A2.6) et du développement de (A2.5) nous permet d'obtenir les éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_3)$.

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} D^{\lambda\mu}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_3) = {} & \frac{[(\lambda+1)^2(2t+1)(2t'+1)]^{1/2}}{\lambda!} \\ & \times C^{p'}_{\lambda}[(\lambda+p+1)!(\lambda+\mu-q+1)!q!(\mu-q)!p!(\lambda-p)! \\ & \times(\mu+p'+1)!(\lambda+\mu-q'+1)!q'!(\mu-q')!p'!(\lambda-p')!]^{1/2} \\ & \times\sum_{ijk}(-1)^i\frac{(\lambda+\mu-i)!}{(\lambda+1)!(\mu-q')!j!}[(\lambda-p'+i)!(p'-j)!(q'-i)!(\mu-q'-k)!]^{1/2} \\ & \times C^j_{p'}C^k_{\mu-q'}C^i_{\lambda-p'}\left(\frac{(j+J_2+M_2)!(k+J_1-M_2)!(\mu-q'+j-k)!(p'-j+k)!}{(J_1+M_1)!(J_1-M_1)!(J_2+M_2)!(J_2-M_2)!}\right) \\ & \times d^{J_1}_{M_1,M'_1}(\nu)d^{J_2}_{M_2,M'_2}(\nu)D^{t'}_{t'_0,M'}(\Omega')D^{t}_{t_0,M'_3}(-\Psi,-\theta,-\phi), \end{aligned} \tag{A2.7}$$

avec

$$\Omega' = (\phi', \theta', \Psi'), \qquad D^{t'}_{t'_0,M'}(\Omega') = \mathrm{e}^{-it'_0\phi'}d^{t'}_{t'_0,M'}(\theta')\,\mathrm{e}^{-iM'\Psi'},$$

(voir Edmonds 1957), et

$$\begin{aligned} & J_1 = [\lambda-(i+j)]/2, \qquad J_2 = [\mu-(i-k)]/2, \\ & M'_1 = [\lambda-2p'+(j-i)]/2, \qquad M'_2 = [\mu-2q'+(i-k)]/2, \\ & M_1 = [\lambda-2p+(j-i)]/2, \qquad M_2 = [\mu-2q+(i-k)]/2, \\ & M' = (\mu-p'-q')/2+(j-k), \qquad M'_3 = (\mu-q-p)/2+(j-k), \\ & 0\leqslant i\leqslant\lambda-p', \qquad 0\leqslant k\leqslant\mu-q', \qquad 0\leqslant j\leqslant p'. \end{aligned}$$

Remerciements

Je remercie Monsieur le Professeur Lambert, d'avoir bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et je lui suis reconnaissant des critiques qu'il a bien voulu formuler. Je remercie vivement le Dr Kibler qui a lu ce travail, qui m'a aidé en participant à de nombreuses discussions et m'a permis de prendre connaissance des travaux du Dr Hongoh.

References

Baird G et Biedenharn L 1963 *J. Math. Phys.* **4** 1449
Bargmann V 1962 *Rev. Mod. Phys.* **34** 829
Bargmann V et Moshinsky M 1960 *Nucl. Phys.* **18** 697
—— 1961 *Nucl. Phys.* **23** 177
Beg M et Ruegg H 1965 *J. Math. Phys.* **6** 677
Brody T, Moshinsky M et Renero I 1965 *J. Math. Phys.* **6** 1540

Chacon E, Ciftan M et Biedenharn L 1972 *J. Math. Phys.* **13** 577
De Swart J J 1963 *Rev. Mod. Phys.* **35** 916
Edmonds A R 1957 *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton, NJ: Princeton University Press)
Hage Hassan M 1970 *Thèse 3ème Cycle* Université Cl. Bernard Lyon-I
Hongoh 1974 *3rd Int. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics, Marseille*
Kramer P et Moshinsky M 1968 *Group Theory and its Applications* ed. E M Loebl (New York: Academic)
Moshinsky M 1963 *J. Math. Phys.* **4** 1128
Nagel J et Moshinsky M 1965 *J. Math. Phys.* **6** 682
Nelson T 1967 *J. Math. Phys.* **8** 857
Resnikoff M 1967 *J. Math. Phys.* **8** 63
Schwinger J 1965 *Quantum Theory of Angular Momentum* ed. L C Biedenharn and H Van Dam (New York: Academic)
Wong C W 1970 *Nucl. Phys.* A **147** 563